

К предстоящей курсовой работе по ДПФ 8 мая 2018 г.

Высокоскоростная свертка с использованием БПФ

Пусть имеются две последовательности $x(k)$ и $h(k)$ длиной в N отсчетов. Используя теорему о циклической свертке этих последовательностей, можно предложить следующую схему ее вычисления:

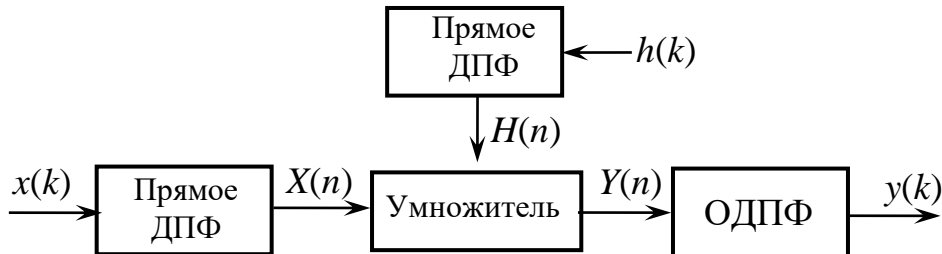


Рис.5.6.1. Блок-схема вычисления свертки с помощью ДПФ

По существу, это схема цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(k)$ и входным сигналом $x(k)$. Эффективность данного способа обеспечивается использованием алгоритма БПФ для вычисления всех ДПФ. При больших N выигрыш в объеме вычислений по сравнению с прямым способом вычисления свертки во временной области может быть весьма значительным. Подсчитаем вычислительные затраты при использовании схемы рис. 5.6.1. и алгоритма БПФ с основанием 2:

- 1) $\frac{N}{2} \log_2 N$ базовых операций при вычислении всех коэффициентов ДПФ $X(n)$;
- 2) $\frac{N}{2} \log_2 N$ базовых операций при вычислении всех коэффициентов ДПФ $H(n)$;
- 3) $\frac{N}{2} \log_2 N$ базовых операций при вычислении ОДПФ;
- 4) N комплексных умножений для вычисления произведений $H(n) \cdot X(n)$,
 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Если интересоваться только самыми трудоемкими операциями комплексного умножения, то их число при использовании БПФ будет $N(3 \log_2 N + 1)$ вместо N^2 при прямом вычислении.

Пример. Пусть $N = 1024 = 2^{10}$. Выигрыш быстрого способа вычисления свертки по сравнению с прямым

$$p = \frac{N^2}{N(3 \log_2 N + 1)} = 33$$

и растет с увеличением N . Если коэффициент фильтра $H(n)$ найдены заранее и занесены в память, то

$$p = \frac{N^2}{2N \log_2 N + N} = 50.$$

Замечание. Схема на рис. 1 вычисляет циклическую свертку. При вычислении линейной свертки последовательности должны иметь $N/2$ ненулевых отсчетов, которые дополняются до массива N нулями. В общем случае, если требуется вычислить линейную свертку последовательностей $x(k)$ и $h(k)$, имеющих N_1 и N_2 отсчетов соответственно, каждая из последовательностей дополняется нулями до $N = N_1 + N_2 - 1$ отсчетов.

Рассмотренные ранее алгоритмы БПФ с прореживанием по времени и по частоте дополняют друг друга при вычислении свертки. В графе с прореживанием по частоте входные отсчеты расположены в нормальном порядке, а выходные – в разрядно-инверсном. В графе с прореживанием по времени – наоборот. Если для прямого преобразования использовать граф с прореживанием по частоте, а для обратного – граф с прореживанием по времени, то необходимости в переупорядочении входных и выходных данных, а также промежуточных результатов, нет.

1. Особенности цифрового спектрального анализа методом ДПФ.

ДПФ играет центральную роль в реализации большого числа алгоритмов цифровой обработки сигналов, что обеспечивается высокоэффективными методами его вычисления. Можно выделить три часто встречающиеся цели спектрального анализа: получение по возможности более точной информации

- а) об амплитудах спектральных компонент,
- б) о частотах спектра сигнала, в) о фазах спектральных компонент.

При гармоническом спектральном анализе методом ДПФ сформулированные выше цели спектрального анализа являются противоречивыми, и одновременное их решение требует определенного компромисса.

В приложениях и алгоритмах, основанных на явном вычислении преобразования Фурье

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.1)$$

при дискретном времени в идеале требуется дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ)

$$X_d(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}. \quad (1.2)$$

Это континуальная периодическая функция частоты

$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_d) \quad (1.3)$$

с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1 / \Delta t$. Периодическое размножение спектра $X(f)$ приводит к эффекту наложения («aliasing») и, как следствие, к погрешности спектрального анализа.

В большинстве задач цифрового спектрального анализа основной операцией является вычисление коэффициентов ДПФ. Программные и аппаратные реализации ДПФ обычно используют прямое преобразование в виде

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.4)$$

Масштабирующий множитель $1 / N$ при этом фигурирует в формуле обратного ДПФ

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j(2\pi/N)nk}. \quad (1.5)$$

Исходными данными для обработки являются N отсчетов сигнала $x(k\Delta t)$, т. е. время наблюдения сигнала равно $T = N\Delta t$ Такое усечение сигнала $x(k)$ по длительности эквивалентно умножению его на оконную функцию $w(k)$:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} [x(k)w(k)] e^{-j(2\pi/N)nk}. \quad (1.6)$$

Далее мы увидим, что вид и длительность окна определяют разрешающую способность и точность спектрального анализа.

Коэффициенты ДПФ $X(n)$ представляют собой масштабированные отсчеты ДВПФ, вычисленные на определенных частотах (на сетке частот ДПФ):

$$X(n) = \frac{1}{\Delta t} X_d(f_n), \quad f_n = n\Delta f = \frac{n}{N\Delta t} = f_d \frac{n}{N}. \quad (1.7)$$

Здесь $\Delta f = \frac{f_d}{N}$ – шаг дискретизации ДВПФ по частоте, N – размерность ДПФ.

Характерным для ДПФ является то, что сигнал $x(k)$ и его спектр $X(n)$ определяются на конечных и равных интервалах, $k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, и являются N -периодическими.

Использование алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) позволяет значительно ускорить вычисление всех N коэффициентов ДПФ $X(n)$ по сравнению с методом прямого вычисления. Это имеет чрезвычайно важное значение и будет рассматриваться нами как неотъемлемая часть цифрового спектрального анализа.

2. Особенности спектрального анализа методом ДПФ

Эффект наложения («aliasing»)

Дискретизация сигнала $x(t)$ по времени с шагом Δt приводит к периодическому повторению исходного спектра $X(f)$ с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$. Полезная информация содержится в полосе $[-f_d/2, f_d/2]$. Если не принять специальных мер, возникает эффект наложения, в результате которого все частоты в спектре сигнала, превышающие половинную частоту дискретизации, как бы отражаются от этой частоты и переносятся на более низкие частоты, искажая исходный спектр (рис. 2.1а). Для устранения этого эффекта сигнал перед дискретизацией предварительно пропускают через низкочастотный фильтр, частота среза которого равна $f_c = 1/2\Delta t$ (рис. 2.1б). Частота $f_d/2$ в зарубежной литературе называется частотой Найквиста.

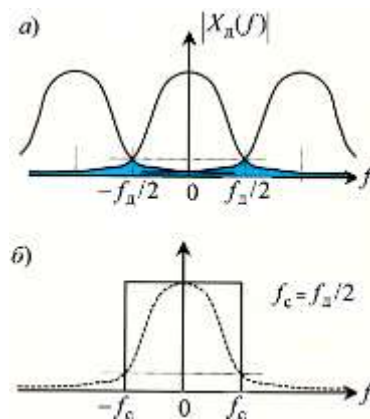


Рис. 2.1

Растекание спектральных компонент («leakage»)

Это явление неизбежно возникает при Фурье-анализе отрезков сигнала ограниченной длительности T , причем игнорируются все, что происходило до и после этого отрезка. Такое действие эквивалентно умножению сигнала на выделяющую функцию (временное окно) $w(t)$. Конечная длительность временного окна при анализе периодического сигнала приводит к тому, что результат получается не в виде идеальных спектральных линий, а каждая линия как бы «размывается» и сопровождается боковыми выбросами (рис. 2.2).

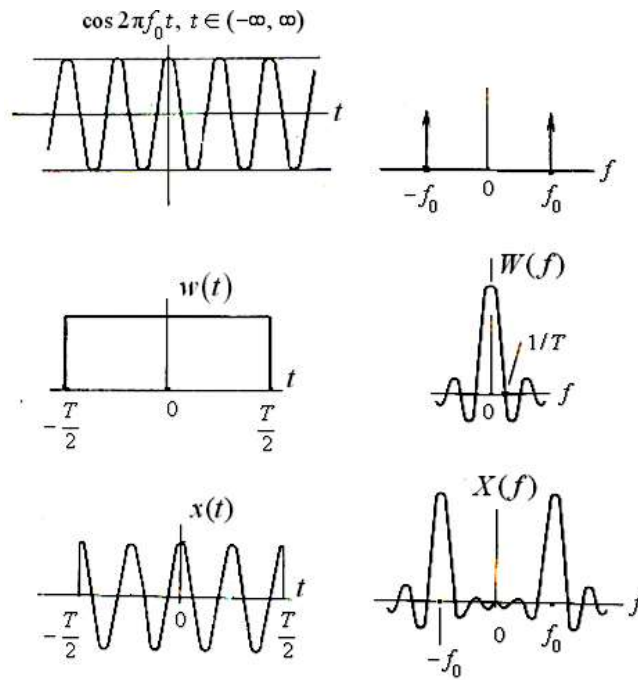


Рис. 2.2

Эти ложные выбросы можно значительно ослабить, устраняя разрывы сигнала и его производных на границах окна, умножением его на плавно изменяющуюся функцию, обращающуюся в нуль за пределами требуемого отрезка сигнала (рис.2.3).

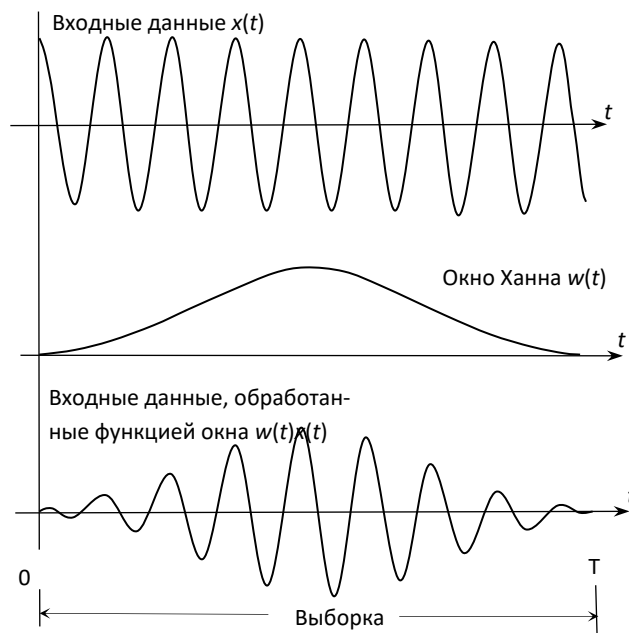


Рис. 2.3

Применение оконных функций при анализе периодических сигналов не приводит к заметным искажениям спектров. Основные этапы обработки непрерывного сигнала при вычислении ДПФ обозначены на рис. 2.4.

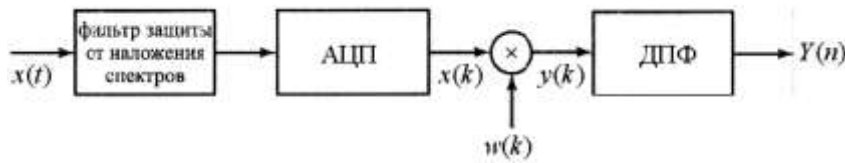


Рис. 2.4. Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ.

Аналоговый фильтр защиты от наложения ослабляет компоненты сигнала выше частоты Найквиста $f_d / 2$. Следующий за ним аналого-цифровой преобразователь (АЦП) выполняет операции дискретизации по времени и квантования выборок сигнала по уровню.

Во многих случаях длительность сигнала $x(t)$, а значит и $x(k)$ очень велика, поэтому перед вычислением ДПФ последовательность $x(k)$ умножается на конечное окно $w(k)$, определяющее размерность ДПФ. В результате получается конечная последовательность $y(k) = x(k)w(k)$, которой в частотной области соответствует периодическая свёртка

$$Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\mu)W(\nu - \mu)d\mu. \quad (2.1)$$

Здесь $\nu = f\Delta t = f / f_d$ – нормированная частота (доли частоты дискретизации),

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu k} -$$

дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ) последовательности $x(k)$,

$$W(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-j2\pi\nu k} - \quad (2.2)$$

ДВПФ конечной последовательности $w(k)$. Непрерывные функции $X(\nu)$ и $W(\nu)$ периодичны по оси частот с периодом $\nu = 1$. Рис. 2.5 иллюстрирует действие прямоугольного окна

$$w(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}, \\ 0 & \text{при других } k. \end{cases} \quad (2.3)$$

Видно, что острые спектральные пики ДВПФ бесконечной косинусоидальной последовательности расширились за счёт свёртки с ДВПФ окна

$$W(\nu) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} w(k)e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{-j2\pi\nu k} = \frac{\sin \pi\nu(N+1)}{\sin \pi\nu}. \quad (2.4)$$

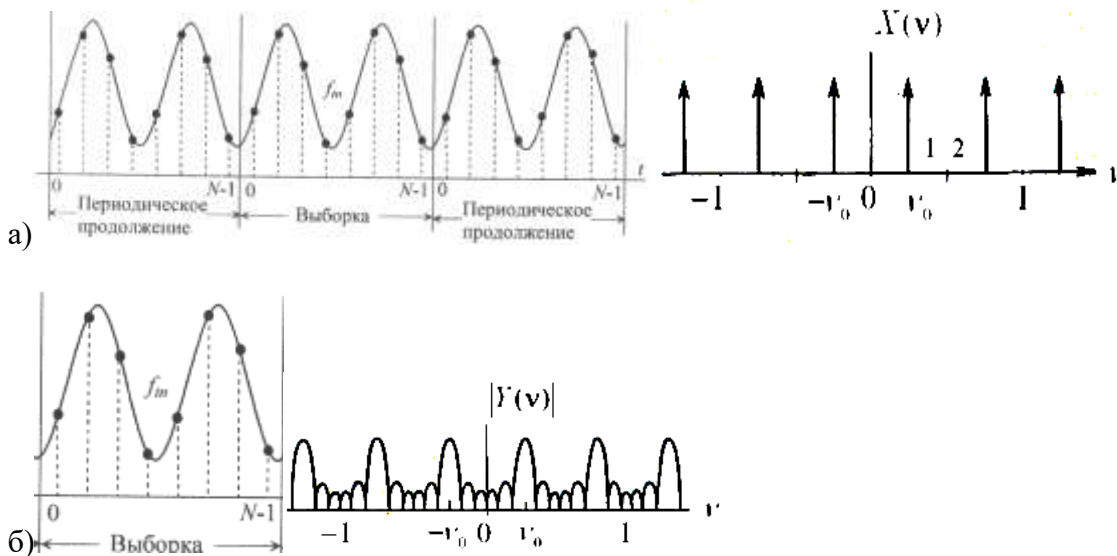


Рис. 2.5. Иллюстрация растекания спектральных компонент из-за взвешивания данных: *a* – исходная дискретно-временная косинусоидальная последовательность $x(k)$ и её ДВПФ $X(v)$; *б*– взвешенная косинусоидальная последовательность $y(k) = x(k)w(k)$ и модуль её ДВПФ $|Y(v)|$

Минимальная ширина спектральных пиков взвешенной оконной последовательности определяется шириной главного лепестка функции $W(v)$ и не зависит от исходных данных. Боковые лепестки спектрального окна $W(v)$, иногда называемые *просачиванием*, будут также изменять амплитуды соседних спектральных пиков, что может привести к дополнительному смещению по частоте. Увеличение частоты дискретизации позволяет ослабить этот эффект. Просачивание приводит не только к амплитудным ошибкам при спектральном анализе, но может также маскировать присутствие слабых сигналов и, следовательно, препятствовать их обнаружению. Применение других оконных функций позволяет снизить уровень боковых лепестков по сравнению с уровнем в случае прямоугольного окна. Снижение уровня боковых лепестков будет уменьшать смещение. Однако, как мы увидим в следующем параграфе, это даётся ценой расширения главного лепестка спектрального окна $W(v)$, что приводит к ухудшению разрешения. Следовательно, должен выбираться компромисс между шириной главного лепестка и уровнем подавления боковых лепестков.

Всё, что говорилось выше относительно растекания, утечки через боковые лепестки и разрешения при ДВПФ-анализе, переносится и на ДПФ-анализ в силу связи между ДВПФ и ДПФ.

Контрольные вопросы по ДПФ

1. Запишите формулы ДПФ.
2. Что такое поворачивающий множитель?
3. Чему равно разрешение по частоте при вычислении ДПФ?
4. С чем связаны трудности прямого вычисления ДПФ ?
5. Что такое БПФ?
6. Каков порядок сложности прямого вычисления ДПФ и БПФ?
7. Назовите основные свойства ДПФ.

8. Дайте определение дискретной нормированной частоты.
9. Поясните смысл ДПФ для периодической последовательности.
10. Как с помощью ДПФ рассчитываются амплитудный и фазовый спектры периодической последовательности? Пример с пятью отсчетами прямоугольного импульса.
11. Поясните смысл ДПФ для конечной последовательности.
12. Как связаны значения абсолютных частот (в герцах [Гц] и радианах в секунду [рад/с]) и дискретных нормированных частот?
13. Как восстановить аналоговый периодический сигнал с финитным спектром по отсчетам ДПФ и на основе ряда Котельникова?
14. Как вычислить спектральную плотность в L точках на основе ДПФ при $L > N$?
15. Как определить разрешение по частоте в ДПФ при добавлении нулей к исходной последовательности?
16. Запишите равенство Парсеваля и поясните его смысл.
17. Что называют растеканием спектра?
18. При каких условиях наблюдается эффект растекания спектра при ДПФ спектральном анализе.?
19. Какие меры принимают для уменьшения эффекта растекания спектра?
20. Поясните, при каком расстоянии между частотами дискретных гармоник возможно их различение на основе ДПФ?
21. Как улучшить различение дискретных гармоник с близко расположенными частотами?
22. Запишите и поясните формулу круговой свертки.
23. Запишите и поясните формулу линейной свертки.
24. Поясните алгоритм вычисления круговой свертки на основе ДПФ.
25. Поясните алгоритм вычисления линейной свертки на основе ДПФ.
26. С какой целью вычисление реакции линейной дискретной системы (ЛДС) по формуле свертки выполняется на основе БПФ?
27. Поясните алгоритм вычисления реакции ЛДС по формуле свертки на основе БПФ.

Повторить лекции по ДПФ 27 марта, 3 апреля, 10 апреля 2018 г.

По учебному пособию (Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье при цифровом спектральном анализе.– М.: 2007.) повторить материал 6-го семестра (стр. 18-28, 34-46), относящийся к дискретному преобразованию Фурье:

- Дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Свойства и теоремы ДПФ.
- Теорема о циклической свёртке.
- Соответствие между ДПФ и рядом Фурье.
- Соответствие между ДПФ и непрерывным преобразованием Фурье.
- Связь ДПФ и ДВПФ.
- Интерполяция добавлением нулевых отсчётов.
- Интерполяция функций с ограниченной полосой с помощью ДПФ.
- Временная и частотная оси ДПФ.

Примеры решения задач на ДПФ

• **ДПФ прямоугольного импульса.**

Напомним формулы анализа и синтеза ДПФ:

формула анализа $X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{j(2\pi/N)nk}$, (без масштабирующего множителя $(1/N)$),

формула синтеза $x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{j(2\pi/N)nk}$.

Рассмотрим последовательность $x[k]$, изображённую на рис. 1, а). При вычислении ДПФ эту последовательность можно считать конечной последовательностью, длина которой равна 5. Периодическая (с периодом 5) последовательность $\tilde{x}[k]$ показана на рис 1, б). Поскольку ее отсчеты постоянны над отрезком $[0,4]$, то

$$\tilde{X}[n] = \sum_{k=0}^4 e^{j(2\pi/5)nk} = \frac{1 - e^{j2\pi n}}{1 - e^{j2\pi n/5}} = \begin{cases} 5, & n = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

т. е. коэффициенты $\tilde{X}[n]$ отличны от нуля только при n , кратных 5 и показаны на рис.1, в).

Там же присутствует график модуля ДВПФ

$$X(\theta) = \sum_{k=0}^4 x(k) e^{-j\theta k} = \frac{1 - e^{j5\theta}}{1 - e^{j\theta}} = \frac{e^{j5\theta/2} \sin(5\theta/2)}{e^{j\theta/2} \sin(\theta/2)}.$$

Ясно, что $\tilde{X}[n]$ - последовательность отсчетов функции $X(\theta)$, вычисленных при $\theta_n = 2\pi n/5$.

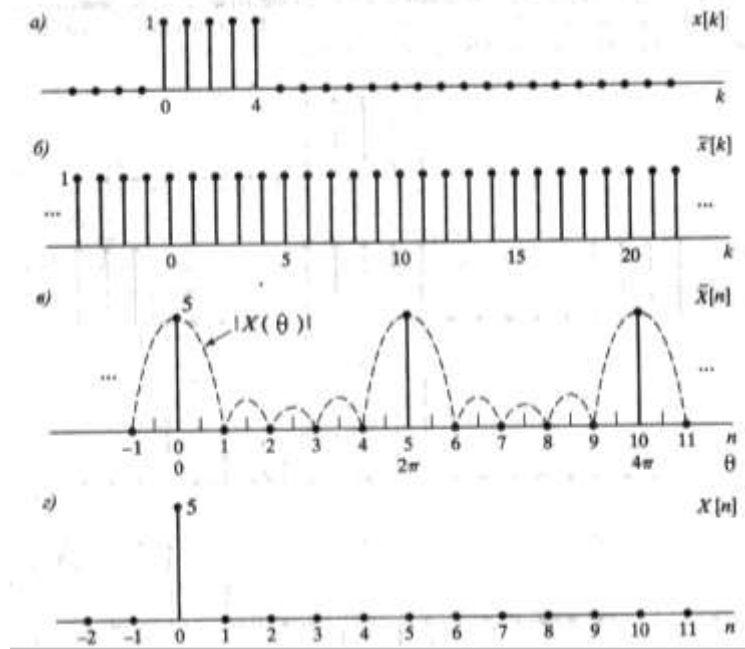


Рис. 1. Иллюстрация ДПФ прямоугольного импульса

Пятиточечное ДПФ $X[n]$ связано с периодической последовательностью $\tilde{X}[n]$ следующим образом:

$$X[n] = \begin{cases} \tilde{X}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

График этого ДПФ изображен на рис. 1, в).

- Рассмотрим последовательность $x[k]$, изображенную на рис. 2, а). При вычислении ДПФ эту последовательность можно считать конечной последовательностью, длина которой равна 5. Периодическая (с периодом 10) последовательность $\tilde{x}[k]$ показана на рис. 2, б). Поскольку ее отсчеты постоянны над отрезком $[0,4]$, то

$$X[n] = \sum_{k=0}^4 e^{-j(2\pi/10)nk} = \frac{1 - e^{-j\pi n}}{1 - e^{-j\pi n/5}} = \frac{e^{-j\pi n/2} \sin \pi n/2}{e^{-j\pi n/10} \sin \pi n/10} = e^{-j4\pi n/10} \frac{\sin \pi n/2}{\sin \pi n/10}.$$

Модуль и фаза ДПФ приведены на рис. 2, в) и рис. 2, г) соответственно (крестиками обозначены точки, в которых фаза не определена).

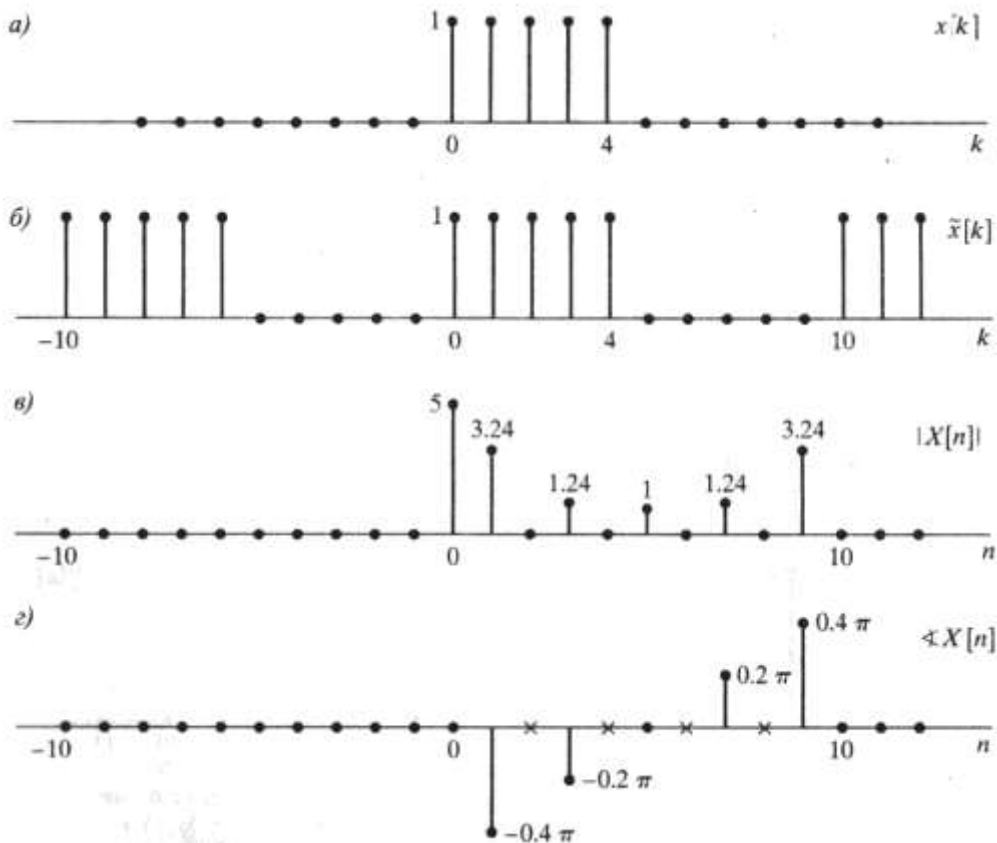
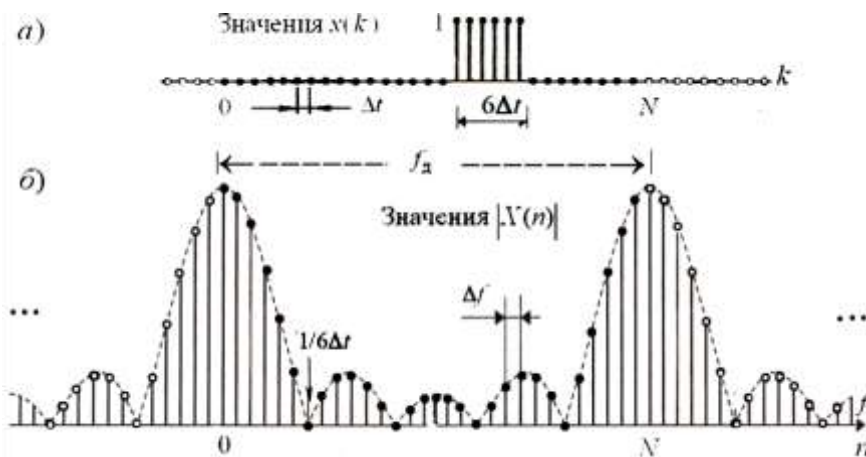


Рис. 2

Сравнивая рис. 1 и рис. 2, видим, добавление к исходной последовательности $x[k]$ 5 нулевых отсчетов увеличивает размерность ДПФ с 5 до 10. При этом повышается качество визуализации ДВПФ

$$X(\theta) = \sum_{k=0}^9 x(k) e^{-j\theta k} = \frac{1 - e^{j5\theta}}{1 - e^{j\theta}} = \frac{e^{j5\theta/2} \sin(5\theta/2)}{e^{j\theta/2} \sin(\theta/2)}$$



Обозначим последовательность из $L=6$ отсчетов прямоугольного импульса через $y(k)$. ДВПФ этой последовательности

$$\begin{aligned}
 Y(v) &= \sum_{k=0}^{L-1} y(k) e^{-j2\pi vk} = \sum_{k=0}^{L-1} e^{-j2\pi vk} = \frac{1 - e^{-j2\pi vL}}{1 - e^{-j2\pi v}} = \frac{e^{-j\pi vL}}{e^{-j\pi v}} \cdot \frac{\sin \pi vL}{\sin \pi v} = \\
 &= e^{-j\pi v(L-1)} \frac{\sin \pi vL}{\sin \pi v} = e^{-j\pi 5v} \frac{\sin \pi 6v}{\sin \pi v} = e^{-j\pi 5f/f_d} \frac{\sin \pi 6f/f_d}{\sin \pi f/f_d}.
 \end{aligned}$$

Модуль этой периодической функции (с периодом f_d) не зависит от начала отсчёта и изображён на рисунке пунктиром.

Последовательность $x(k)$ длиной в N отсчётов получена путём дополнения последовательности $y(k)$ нулевыми отсчётами. Число таких нулевых отсчётов будет $N - L$. При этом улучшается качество визуализации спектральной функции $Y(v)$, которая остаётся неизменной от такого дополнения, так как она определяется первоначальной длиной массива $y(k)$. Отсчётные значения функции $X(v)$ в точках $v_n = n/N$, $n=0, 1, \dots, N-1$, взятые с шагом $\Delta v = 1/N$, будут

$$X(v_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi nk/N}.$$

Это выражение с точностью до множителя $1/N$ представляет собой N -точечное ДПФ.

На рисунке б изображены относительные величины N коэффициентов ДПФ на интервале $0 \leq n \leq N-1$:

$$X(n) = \frac{1}{N} X(v = \frac{n}{N}), \quad n \in [0, N-1], \quad N = 30.$$

Расстояние по сетке частот ДПФ $\Delta f = f_d / N = 1/N\Delta t = 1/30\Delta t$ Гц. Видно, что улучшается качество визуализации спектральной функции $Y(v)$, которая остаётся неизменной от такого дополнения, так как она определяется первоначальной длиной массива $y(k)$.

Если бы ДПФ вычислялось по $N = L = 6$ отсчетам, т. е. без дополнения нулями, то на интервале $0 \leq n \leq N-1$ был бы всего один отсчет $X(0)$, по которому визуализация спектральной функции $Y(v)$ была бы невозможна. Расстояние по сетке частот ДПФ было бы $\Delta f = f_d / N = 1/N\Delta t = 1/6\Delta t$ Гц.

- Найти и изобразить по модулю ДВПФ N -точечных последовательностей

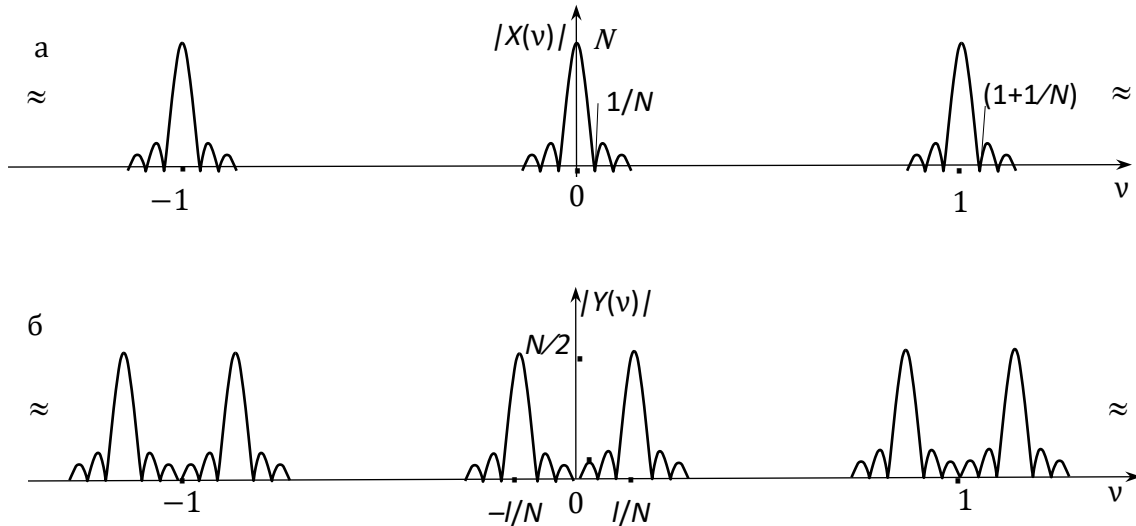
$$\begin{aligned}
 x(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} 1(k-m) \quad \text{и} \quad y(k) = x(k) \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right). \\
 X(v) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi vk} \right] = \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi vk} \right] = \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi vm} = \frac{1 - e^{-j2\pi vN}}{1 - e^{-j2\pi v}} = e^{-j2\pi v(N-1)} \cdot \frac{\sin \pi vN}{\sin \pi v}.
 \end{aligned}$$

Модуль этой функции изображен на рис. а.

$$Y(v) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m) e^{-j2\pi\left(v+\frac{l}{N}\right)k} \right] + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m) e^{-j2\pi\left(v-\frac{l}{N}\right)k} \right] =$$

$$= e^{-j\pi\left(v+\frac{l}{N}\right)(N-1)} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin \pi\left(v+\frac{l}{N}\right)N}{\sin \pi\left(v+\frac{l}{N}\right)} + e^{-j\pi\left(v-\frac{l}{N}\right)(N-1)} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin \pi\left(v-\frac{l}{N}\right)N}{\sin \pi\left(v-\frac{l}{N}\right)}.$$

Модуль этой функции изображен на рис. б.

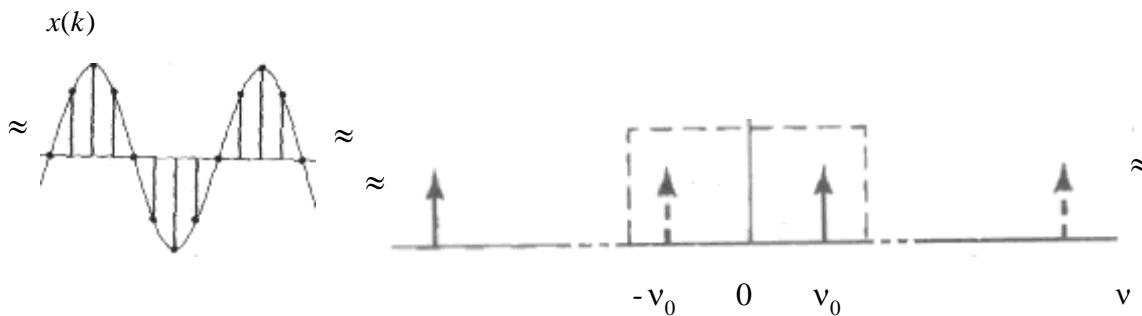


• Гармонический сигнал $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ дискретизируется так, что на периоде образуется 8 отсчетов.

1. Изобразить последовательность $x(k)$ и ее спектр.
2. Найти и изобразить по модулю ДВПФ и ДПФ последовательности

$$y(k) = \sum_{m=0}^{15} x(m) \mathbf{1}(k-m) \text{ и.}$$

Решение 1. $x(k) = \cos 2\pi f_0 k \Delta t = \cos 2\pi v_0 k$, $v_0 = f_0 \Delta t = f_0 / f_d$ – частота косинусоиды, нормированная к частоте дискретизации (доли частоты дискретизации). Спектр дискретизованной косинусоиды – две дельта-функции (с весом $1/2$), повторяющиеся с периодом 1.



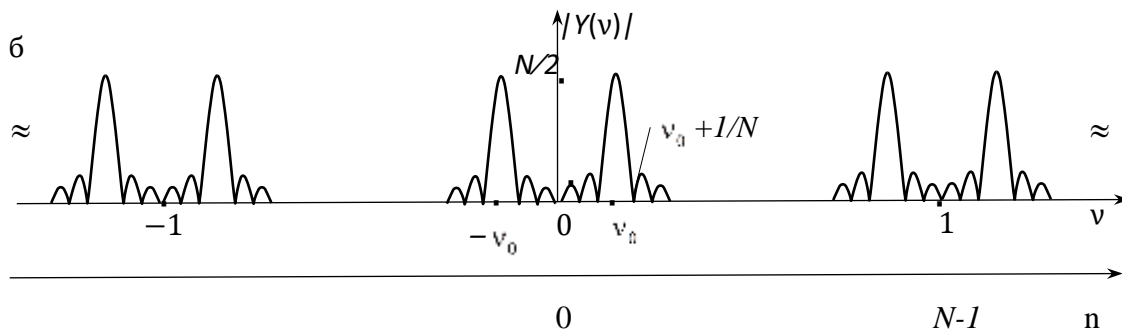
Решение 2. Последовательность $y(k)$ представляет собой отрезок из двух периодов косинусоиды.

С учетом того, что $\cos 2\pi v_0 k = \frac{1}{2} \exp(j2\pi v_0 k) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi v_0 k)$ можем записать для ДВПФ последовательности $y(k)$

$$Y(v) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi(v+v_0)k} \right] + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi(v-v_0)k} \right] =$$

$$= e^{-j\pi(v+v_0)(N-1)} \cdot \frac{\sin \pi(v+v_0)N}{\sin \pi(v+v_0)} + e^{-j\pi(v-v_0)(N-1)} \cdot \frac{\sin \pi(v-v_0)N}{\sin \pi(v-v_0)}.$$

Модуль этой функции изображен на рис. б. Здесь $N=16$.



Коэффициенты ДПФ $X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{j(2\pi/N)nk}$, связаны с отсчетами ДВПФ соотношением

$X(n) = X(v = \frac{n}{N})$, $n \in [0, N-1]$, $N=16$. Если v_0 кратно бину ДПФ $1/N$, т. е. $v_0 = \frac{n_0}{N}$, то на интервале $[0, N-1]$, $N=16$ будут всего два отсчета ДПФ $X(n_0)$ и $X(N-n_0) = X^*(n_0)$.

Задачи и упражнения на ДПФ

1. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_b = 10$ кГц дискретизируется в соответствии с теоремой отсчетов. По последовательности $x(k) = x(k \Delta t)$ длиной в $N = 1000$ отсчетов вычисляется N -точечное

ДПФ $X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Известны два значения $X(900) = 1$ В и $X(420) = 5$ В.

Найти все значения ДВПФ

$$X(v) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi vk},$$

которые можно определить.

2. Вычислить коэффициенты ДПФ $X(n)$ для

$$x(k) = \begin{cases} \cos(\frac{2\pi}{N}rk), & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

и фиксированного значения $r = 5$ и $N = 16$.

3. Действительный сигнал $x(t)$ дискретизируется с частотой $f_d = 10$ кГц так, что наложение отсутствует. Получающаяся последовательность $x(k)$ содержит $N = 512$ отсчетов. По этой последовательности вычисляется 512-точечное ДПФ, коэффициенты которого вычисляются по формуле

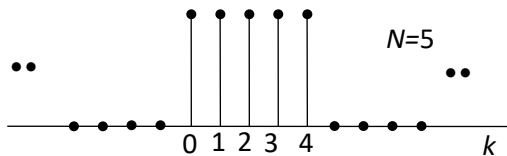
$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}.$$

Известно, что $X(11) = 2000(1+j)$. Что можно сказать о других $X(n)$ и о значениях ДВПФ

$$X(\nu) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi 8k\nu}$$

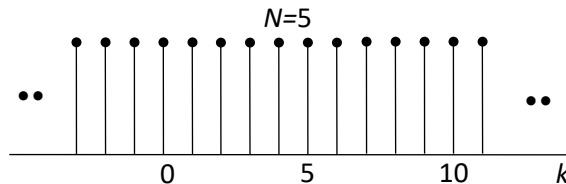
на соответствующих частотах?

4. Дана конечная последовательность $x(k)$ в виде пяти отсчетов прямоугольного импульса



а) Найти и изобразить по модулю ДВПФ этой последовательности.

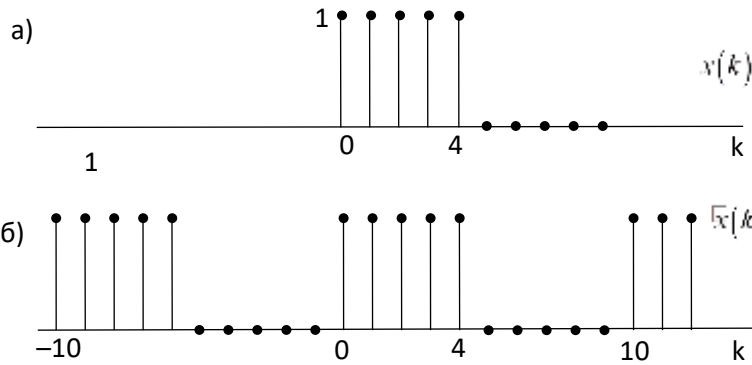
б) Для периодического повторения этой последовательности с периодом $N=5$



$$x(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k+rN)$$

найти и изобразить по модулю ДВПФ и ДПФ.

5. Изобразить модули коэффициентов ДПФ 5-точечной последовательности а) и её периодического продолжения б) с периодом 10.



6. Сигнал $x(t) = \cos w_0 t$ дискретизируется с шагом Δt и из полученной последовательности вырезается отрезок $x(k)$ длиной в N отсчетов, т.е. $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Для проведения спектрального анализа вычисляется N -точечное ДПФ

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Для фиксированных w_0, N, n_0 подобрать Δt , т. ч. $X(n_0) \neq 0, X(N-n_0) \neq 0$, а остальные $X(n)$ равны нулю. Единственное ли это Δt ?

7. Пусть $X(n) = \sum_{k=0}^{11} x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$ - 12-точечное ДПФ действительной последовательности $x(k)$ и пусть

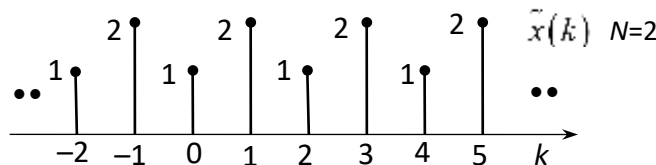
$$\begin{aligned} X(0) &= 10, & X(1) &= -5 - j4, & X(2) &= 3 - j2, & X(3) &= 1 + j3, \\ X(4) &= 2 + j5, & X(5) &= 6 - j2, & X(6) &= 12 \end{aligned}$$

Не вычисляя обратного ДПФ, определить

$$a) x(0), \quad b) x(6), \quad c) \sum_{k=0}^{11} x(k), \quad d) \sum_{k=0}^{11} e^{j \frac{2\pi}{3} k} x(k), \quad e) \sum_{k=0}^{11} |x(k)|^2$$

8. Пусть $x(k)$ - N -периодическая последовательность. Тогда $3N$ тоже можно считать её периодом. Пусть $\tilde{X}(n)$ - коэффициенты ДПФ N -периодической последовательности, а $\tilde{X}_3(n)$ - коэффициенты ДПФ $3N$ -периодической последовательности $x(k)$.

Выразить $\tilde{X}_3(n)$ через $\tilde{X}(n)$. Проверить результат для последовательности.



9. Пусть $y(k)$ означает циклическую свёртку двух последовательностей $x(k)$ и $h(k)$, $0 \leq k \leq N-1$. Проверить равенство

$$\sum_{k=0}^{N-1} y(k) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k) \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} h(k) \right).$$

10. Определить ДПФ N -точечной последовательности (N – четное).

$$x(k) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0, & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1 \end{cases}$$

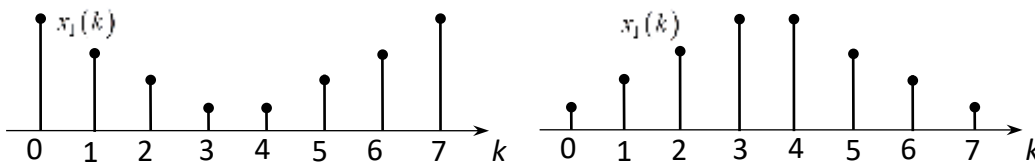
11. Определить ДПФ N -точечной последовательности (N – четное).

$$x(k) = \begin{cases} 1, & k - \text{четно}, \\ 0, & k - \text{нечетно}. \end{cases}$$

12. Определить и изобразить по модулю коэффициенты ДПФ $X(n)$ и ДВПФ для последовательности

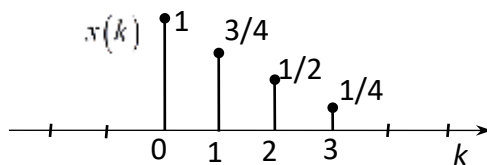
$$x(k) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{N} 3k\right), & 0 \leq k \leq N - 1, N = 16, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

13. Даны две 8-точечные последовательности $x_1(k)$ и $x_2(k)$.



Найти выражение, связывающее ДПФ этих последовательностей $X_1(n)$ и $X_2(n)$.

14. Пусть $X(n)$ - четырехточечное ДПФ последовательности



Изобразить последовательность $y(k)$, ДПФ которого имеет вид

$$Y(n) = e^{-j\frac{2\pi}{4} 3n} X(n)$$

15. Имеется пара N -точечного ДПФ $x(k) \leftrightarrow X(n)$. Можно ли утверждать, что

$$\operatorname{Re}\{X(n)\} = Y(n),$$

где $Y(n)$ - ДПФ последовательности $y(k) = \frac{1}{2}[x(k) + x(-k)]$?

16. Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_b = 10$ кГц дискретизируется в соответствии с теоремой отсчетов, в результате получается последовательность $x(k)$. Обозначим через $X(n)$ 1000-точечное ДПФ последовательности $x(k)$.

а) Какой непрерывной частоте соответствует индекс $n = 250$ в последовательности $X(n)$?

б) Какой непрерывной частоте соответствует индекс $n = 700$ в последовательности $X(n)$?

17. Последовательность $x(k) = x(k\Delta t)$ получена в результате дискретизации непрерывного сигнала $x(t)$ с шагом Δt . Пусть частота непрерывного сигнала ограничена 100кГц. Для оценки спектра сигнала вычисляется 1024-точечное ДПФ $X(n)$ последовательности $x(k)$. При каком наименьшем шаге Δt расстояние между непрерывными частотами, соответствующими отсчетам ДПФ, не превышает 1 кГц?

18. 5000-членная последовательность $x(k)$ получена в результате дискретизации непрерывного сигнала $x(t)$ с шагом $\Delta t = 50$ мкс. Обозначим через $X(n)$ 8192-точечное ДПФ последовательности $x(k)$. Определить расстояние между непрерывными частотами, соответствующими отсчетам ДПФ.